ICS 21.200 VDI-RICHTLINIEN Juli 2005

VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE	Vektorrechnung Grundlagen für die praktische Anwendung	VDI 2120

Vector analysis
Fundamentals for practical application

Frühere Ausgabe: 5.78, 03.04, Entwurf

Inhalt

Seite

Einführung 2

1 Definition von Skalaren und Vektoren 2
1.1 Skalar 2
1.2 Vektor 2
1.2.1 Freier Vektor 2
1.2.2 Linienflüchtiger Vektor. 3
1.2.3 Gebundener Vektor 3

2 Darstellungsformen für Vektoren 3
2.1 Übersicht 3
2.2 Geometrische Darstellung für Vektoren . . 4
2.3 Koordinatendarstellungen für Vektoren. . . 4
2.3.1 Einheitsvektoren in den Koordinatenachsen 4
2.3.2 Koordinaten von Vektoren 4
2.3.3 Koordinatendarstellung in vektorieller Schreibweise 4
2.3.4 Koordinatendarstellung in Matrizenschreibweise 4
2.4 Beispiel 5

3 Summe und Differenz von Vektoren 5
3.1 Geometrische Darstellung 5
3.1.1 Addition zweier Vektoren 5
3.1.2 Addition mehrerer Vektoren 5
3.1.3 Subtraktion zweier Vektoren 6
3.1.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 6
3.2 Koordinatendarstellungen. 6
3.2.1 Addition zweier Vektoren 6
3.2.2 Addition mehrerer Vektoren 7
3.2.3 Subtraktion zweier Vektoren 7
3.2.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 7

Seite

4 Skalarprodukt zweier Vektoren 7
4.1 Geometrische Darstellung 7
4.2 Skalarprodukt von Einheitsvektoren 8
4.3 Koordinatendarstellungen 8
4.4 Schnittwinkel zweier Vektoren 8
4.5 Skalarprodukt aus einer Vektorsumme (Vektordifferenz) und einem Vektor 8
4.6 Multiplikation eines Skalarprodukts mit einem Skalar 8
4.7 Senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor 8
4.8 Beispiele zum Skalarprodukt 9

5 Vektorprodukt zweier Vektoren 10
5.1 Geometrische Darstellung 10
5.2 Vektorprodukt von Einheitsvektoren 10
5.3 Koordinatendarstellungen 10
5.4 Summe und Differenz von Vektorprodukten 11
5.5 Multiplikation eines Vektorprodukts mit einem Skalar 11
5.6 Beispiel zum Vektorprodukt 11

6 Zusammengesetzte Produkte 12
6.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalarprodukt. 12
6.2 Skalarprodukt eines Vektors mit dem Vektorprodukt zweier anderer Vektoren (Spatprodukt) 12
6.3 Vektorprodukt eines Vektors mit dem Vektorprodukt zweier anderer Vektoren (Entwicklungssatz) 13

VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb
Ausschuss Räumliche Getriebe

Seite

6.4 Skalares Produkt zweier Vektorprodukte (Lagrange'sche Identität) 14
6.5 Vektorielles Produkt zweier Vektorprodukte 14
6.6 Jacobi'sche Identität 14
6.7 Beispiele 14

Seite

7 Differentiation von Vektoren nach der Zeit . . 17
7.1 Zeitliche Abhängigkeit von Vektoren . . . 17
7.2 Ableitung von Vektoren nach der Zeit . . . 18
7.3 Regeln für die Ableitung von Vektoren nach der Zeit 18
Schrifttum . . . .

Einführung

Die analytische und rechnerische Behandlung der räumlichen Mechanik, insbesondere der Geometrie, Kinematik, Statik und Dynamik räumlicher Getriebe, setzt die Kenntnis der wichtigsten Grundlagen der Vektoralgebra voraus. Hierzu gehören die Gesetze der Addition, Subtraktion, Multiplikation sowie Differentiation, die nachfolgend beschrieben werden.

Bei der Anwendung der Vektoralgebra auf physikalische Vorgänge sind die spezifischen physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu berücksichtigen. Die in dieser VDI-Richtlinie beschriebene Vektoralgebra gilt zunächst nur für freie Vektoren. Für linienflüchtige und gebundene Vektoren müssen noch zusätzliche Bedingungen berücksichtigt werden. Beispiele finden sich in Abschnitt 6.7 dieser VDI-Richtlinie und in den Richtlinien VDI 2722, VDI 2723 und VDI 2739, Blatt 1 bis Blatt 3.

In der früheren Richtlinie VDI 2120 vom Mai 1978 wurden nur die geometrische Darstellung und die Komponentendarstellung der Vektoren benutzt. In der jetzt vorliegenden Richtlinie werden neben der anschaulichen geometrischen Darstellung der Vektoren nun für numerische Berechnungen systematisch die Koordinatendarstellungen in vektorieller Schreibweise und in Matrizenschreibweise gegenübergestellt.

1 Definition von Skalaren und Vektoren

1.1 Skalar

Ein Skalar ist eine Größe, das heißt ein Produkt aus Zahlenwert und Einheit. Die Größe ist durch diese Angaben eindeutig bestimmt.

Die Bezeichnung erfolgt durch lateinische oder griechische Buchstaben. Skalare sind z.B. die Masse $m = 5$ kg, die Zeit $t = 5$ s, die Arbeit $W = 10$ J.

1.2 Vektor

Ein Vektor ist eine Größe, zu deren Festlegung noch die Angabe des Richtungssinnes notwendig ist (gerichtete Größe).

Die Bezeichnung erfolgt meistens durch lateinische oder griechische, fett gesetzte Buchstaben, also $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\omega}$ usw. Ersatzweise werden auch unterstrichene Buchstaben, also $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{\omega}$ usw., oder Buchstaben mit darübergesetztem Pfeilsymbol, also $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\omega}$ usw., verwendet.

Unter dem Betrag eines Vektors $\boldsymbol{a}$ wird der Betrag seiner Größe verstanden. Es gilt die Schreibweise $|\boldsymbol{a}| = a$. Ein dimensionsloser Vektor vom Betrag 1 heißt Einheitsvektor; die Schreibweise ist

$$\mathbf{e}_{\mathrm{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{e}_{\mathrm{a}}| = 1$$

wobei der Richtungssinn von $\mathbf{e}_{\mathrm{a}}$ mit dem von $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt.

Die zeichnerische Darstellung eines im Allgemeinen dimensionsbehafteten Vektors erfolgt durch eine gerichtete Strecke (Vektorpfeil) unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes. Der Einheitsvektor kann unabhängig von diesem Maßstab in beliebiger Länge gezeichnet werden. Zur Definition des Nullvektors siehe Abschnitt 3.1.2.

1.2.1 Freier Vektor

Ein Vektor, der ohne Änderung seiner Wirkung unter Beibehaltung seines Richtungssinnes beliebig zu sich selbst parallel verschoben werden kann, heißt freier Vektor.

Ein freier Vektor ist z.B. die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines translatorisch bewegten starren Körpers (Bild 1).

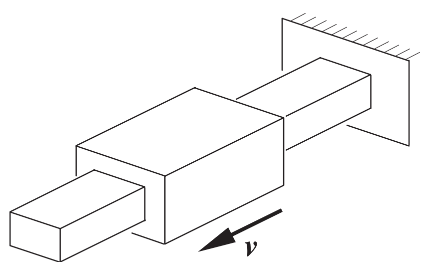

Bild 1. Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines translatorisch bewegten Körpers